Лекция №2

Тема: «Системы счисления. Перевод чисел из одной системы счисления в другую»

План

1. Непозиционные и позиционные системы счисления.
2. Системы счисления, используемые в электронно-вычислительных машинах.
3. Перевод чисел из одной системы счисления в другую.

1. Непозиционные и позиционные системы счисления.

<u>Система счисления</u> – это совокупность приемов и правил, по которым числа записываются и читаются.

Системы счисления делятся на:

1. **В непозиционных система счисления** вес цифры (т.е. тот вклад, который она вносит в значение числа) **не зависит от ее позиции** в записи числа. Так, в римской системе счисления в числе XXXII (тридцать два) вес цифры X в любой позиции равен просто десяти.
2. **В позиционных системах счисления** вес каждой цифры изменяется в зависимости от ее положения (позиции) в последовательности цифр, изображающих число. Например, в числе 757,7 первая семерка означает 7 сотен, вторая – единиц, а третья – 7 десятых долей единиц.

Сама же запись числа 757,7 означает сокращенную запись выражения:

$700 + 50 + 7 + 0,7 = 7 * 10^2 + 5 * 10^1 + 7 * 10^0 + 7 * 10^{-1} = 757,7.$

Любая позиционная система счисления характеризуется свои **основанием.**

<u>Основание позиционной системы счисления</u> – количество различных цифр, используемых для изображения чисел в данной системе счисления.

За основание системы можно принять любое натуральное число – два, три, четыре и т.д. Следовательно, **возможно бесчисленное множество позиционных систем:** двоичная, троичная, четверичная и т.д. Запись чисел в каждой из систем счисления с основанием q означает сокращенную запись выражения:

$$a_{n-1}q^{n-1} + a_{n-2}q^{n-2} + \cdots + a_1q^1 + a_0q^0 + a_{-1}q^{-1} + \cdots + a_{-m}q^{-m},$$

где $\boldsymbol{a_i}$ – цифры системы счисления, $\boldsymbol{n}$ и $\boldsymbol{m}$ – число целых и дробных разрядов, соответственно.

Например:

Разряды 3 2 1 0 -1

Число **1 0 1 1, $\mathbf{1_2}$** $= 1 * 2^3 + 0 * 2^2 + 1 * 2^1 + 1 * 2^0 + 1 * 2^{-1}$,

Разряды 2 1 0 -1 -2

Число **2 7 6, 5 $\mathbf{2_8}$** $= 2 * 8^2 + 7 * 8^1 + 6 * 8^0 + 5 * 8^{-1} + 2 * 8^{-2}$,

2. Системы счисления, используемые в электронно-вычислительных машинах.

Кроме десятичной широко используются системы с основанием, являющимся целой степенью числа 2, а именно:

- **двоичная** (используются цифры 0,1);
- **восьмеричная** (используются цифры 0,1,…, 7);
- **шестнадцатеричная** (для первых целых чисел от нуля до девяти используются цифры 0,1, …, 9, а для следующих чисел – от десяти до пятнадцати – в качестве цифр используются символы A, B, C, D, E, F).

Полезно запомнить запись в этих системах счисления первых двух десятков целых чисел:

Десятичная	**Двоичная**	**Восьмеричная**	**Шестнадцатеричная**
0	0	0	
1	1	1	1
2	10	2	2
3	11	3	3
4	100	4	4
5	101	5	5
6	110	6	6
7	111	7	7
8	1000	10	8
9	1001	11	9
10	1010	12	A
11	1011	13	B
12	1100	14	C
13	1101	15	D
14	1110	16	E
15	1111	17	F
16	10000	20	10
17	10001	21	11
18	10010	22	12
19	10011	23	13

Из всех систем счисления **особенно проста** и поэтому **интересна для технической реализации в компьютерах двоичная система счисления.**

3. Перевод чисел из одной системы счисления в другую.

Перевод чисел из одной системы счисления в другую составляет важную часть машинной арифметики. Рассмотрим основные правила перевода.

1. Для перевода двоичного числа в десятичное необходимо его записать в виде многочлена, состоящего из произведений цифр числа и соответствующей степени числа 2, и вычислить по правилам десятичной арифметики:

$$X_2 = A_n \cdot 2^{n-1} + A_{n-1} \cdot 2^{n-2} + A_{n-2} \cdot 2^{n-3} + \ldots + A_2 \cdot 2^1 + A_1 \cdot 2^0$$

При переводе удобно пользоваться таблицей степеней двойки:

Таблица 4. Степени числа 2

n (степень)	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2^n	1	2	4	8	16	32	64	128	256	512	1024

Пример . Число 11101000_2 перевести в десятичную систему счисления.

$11101000_2 = 1 \cdot 2^7 + 1 \cdot 2^6 + 1 \cdot 2^5 + 0 \cdot 2^4 + 1 \cdot 2^3 + 0 \cdot 2^2 + 0 \cdot 2^1 + 0 \cdot 2^0 = 232_{10}$

2. Для перевода восьмеричного числа в десятичное необходимо его записать в виде многочлена, состоящего из произведений цифр числа и соответствующей степени числа 8, и вычислить по правилам десятичной арифметики:

$$X_8 = A_n \cdot 8^{n-1} + A_{n-1} \cdot 8^{n-2} + A_{n-2} \cdot 8^{n-3} + \ldots + A_2 \cdot 8^1 + A_1 \cdot 8^0$$

При переводе удобно пользоваться таблицей степеней восьмерки:

Таблица 5. Степени числа 8

n (степень)	0	1	2	3	4	5	6
8^n	1	8	64	512	4096	32768	262144

Пример. Число 75013_8 перевести в десятичную систему счисления.

$75013_8 = 7 \cdot 8^4 + 5 \cdot 8^3 + 0 \cdot 8^2 + 1 \cdot 8^1 + 3 \cdot 8^0 = 31243_{10}$

3. Для перевода шестнадцатеричного числа в десятичное необходимо его записать в виде многочлена, состоящего из произведений цифр числа и соответствующей степени числа 16, и вычислить по правилам десятичной арифметики:

$$X_{16} = A_n \cdot 16^{n-1} + A_{n-1} \cdot 16^{n-2} + A_{n-2} \cdot 16^{n-3} + \ldots + A_2 \cdot 16^1 + A_1 \cdot 16^0$$

При переводе удобно пользоваться таблицей степеней числа 16:

Таблица 6. Степени числа 16

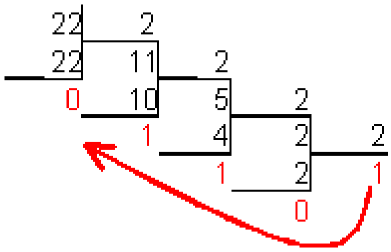
n (степень)	0	1	2	3	4	5	6
16^n	1	16	256	4096	65536	1048576	16777216

Пример . Число $FDA1_{16}$ перевести в десятичную систему счисления.

$FDA1_{16} = 15 \cdot 16^3 + 13 \cdot 16^2 + 10 \cdot 16^1 + 1 \cdot 16^0 = 64929_{10}$

4. Для перевода десятичного числа в двоичную систему его необходимо последовательно делить на 2 до тех пор, пока не останется остаток, меньший или равный 1. Число в двоичной системе записывается как последовательность последнего результата деления и остатков от деления в обратном порядке.

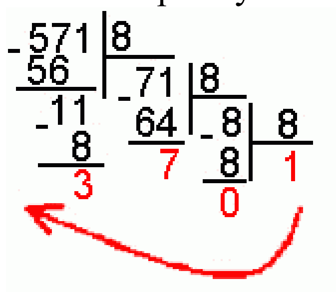
Пример. Число 22_{10} перевести в двоичную систему счисления.



$22_{10} = 10110_2$

5. Для перевода десятичного числа в восьмеричную систему его необходимо последовательно делить на 8 до тех пор, пока не останется остаток, меньший или равный 7. Число в восьмеричной системе записывается как последовательность цифр последнего результата деления и остатков от деления в обратном порядке.

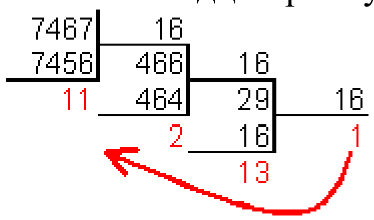
Пример. Число 571_{10} перевести в восьмеричную систему счисления.



$571_{10} = 1073_8$

6. Для перевода десятичного числа в шестнадцатеричную систему его необходимо последовательно делить на 16 до тех пор, пока не останется остаток, меньший или равный 15. Число в шестнадцатеричной системе записывается как последовательность цифр последнего результата деления и остатков от деления в обратном порядке.

Пример. Число 7467_{10} перевести в шестнадцатеричную систему счисления.



$7467_{10} = 1D2B_{16}$

7. Чтобы перевести число из двоичной системы в восьмеричную, его нужно разбить на триады (тройки цифр), начиная с младшего разряда, в случае необходимости дополнив старшую триаду нулями, и каждую триаду заменить соответствующей восьмеричной цифрой (табл. 3).

Пример. Число 1001011_2 перевести в восьмеричную систему счисления.

$001\ 001\ 011_2 = 113_8$

8. Чтобы перевести число из двоичной системы в шестнадцатеричную, его нужно разбить на тетрады (четверки цифр), начиная с младшего разряда, в случае необходимости дополнив старшую тетраду нулями, и каждую тетраду заменить соответствующей восьмеричной цифрой (табл. 3).

Пример. Число 1011100011_2 перевести в шестнадцатеричную систему счисления.

$0010\ 1110\ 0011_2 = 2E3_{16}$

9. Для перевода восьмеричного числа в двоичное необходимо каждую цифру заменить эквивалентной ей двоичной триадой.

Пример. Число 531_8 перевести в двоичную систему счисления.

$531_8 = 101011001_2$

10. Для перевода шестнадцатеричного числа в двоичное необходимо каждую цифру заменить эквивалентной ей двоичной тетрадой.

Пример. Число $EE8_{16}$ перевести в двоичную систему счисления.

$EE8_{16} = 111011101000_2$

11. При переходе из восьмеричной системы счисления в шестнадцатеричную и обратно, необходим промежуточный перевод чисел в двоичную систему.

Пример 1. Число FEA_{16} перевести в восьмеричную систему счисления.

$FEA_{16} = 111111101010_2$

$111\ 111\ 101\ 010_2 = 7752_8$

Пример 2. Число 6635_8 перевести в шестнадцатеричную систему счисления.

$6635_8 = 110110011101_2$

$1101\ 1001\ 1101_2 = D9D_{16}$

12. Перевод дробной части

При переводе дробной части, в отличие от перевода целой части - нужно не делить, а умножать на основание той системы счисления, в которую мы переводим. При этом каждый раз отбрасываются целые части, а дробные части - снова умножаются. Собрав целые части в том порядке, как они были получены - получается дробная часть числа в нужной системе счисления.

Одна операция умножения даёт ровно один дополнительный знак в системе счисления, в которую осуществляется перевод.

При этом существует два условия завершения процесса:

1) в результате очередного умножения Вы получили ноль в дробной части. Понятно, что дальше этот ноль сколько ни умножай - он всё равно останется нулём. Это означает, что число перевелось из десятичной системы счисления в нужную точно.

2) не все числа возможно перевести точно. В таком случае обычно переводят с некоторой точностью. При этом сначала определяют, сколько знаков после запятой будет нужно - именно такое количество раз и нужно будет выполнить операцию умножения.

Вот пример перевода числа 0.39_{10} в двоичную систему счисления. Точность - 8 разрядов (в данном случае точность перевода выбрана произвольно):

Если выписать целые части в прямом порядке, то получим 0.39_{10}=0.01100011_2. Самый первый ноль (на рисунке перечёркнут синим) выписывать не нужно - так как он относится не к дробной части, а к целой. Некоторые по ошибке записывают этот ноль после запятой, когда выписывают результат.

Вот так будет выглядеть перевод числа 0.39_{10} в шестнадцатеричную систему счисления. Точность - 8 разрядов в данном случае точность снова выбрана произвольно:

Если выписать целые части в прямом порядке, то получим 0.39_{10}=$0.63D700A3_{16}$.

При этом Вы, наверное, заметили, что целые части при умножении получаются в десятичной системе счисления. Эти целые части, полученные при переводе дробной части числа следует интерпретировать точно так же, как и остатки при переводе целой части числа. То есть, если при переводе в шестнадцатеричную систему счисления целые части получились в таком порядке: 3, 13, 7, 10, то соответствующее число будет равно $0.3D7A_{16}$.

Контрольные вопросы:

1. Что такое система счисления?
2. Чем отличается позиционная от непозиционной системы счисления?
3. Приведите пример позиционной системы счисления.
4. Что такое основание позиционной системы счисления?
5. Какие системы счисления используются в ЭВМ?